# ヘルツ接触応力

この問題を始める前に注意事項を読みなさい．

**イントロダクション**

ヘルツ接触理論は接触力学の古典的な理論であり、技術者や研究者にとって非常に有用なツールである。理論の導出が比較的難しいにもかかわらず、最終的な解は、システムの特性と発生応力を関連付ける一連の単純な解析式となる。ヘルツ接触理論は、いわゆる半空間近似に基づく弾性理論方程式から解析的に導出される：

１．表面の１つは無限に広がる半空間 (平面が３次元 ユークリッド空間を分割するときに形成される２つの領域の１つ) である（図１)。

２．圧力分布は (２) 式で与えられると仮定する。

３．無限に広がる半空間モデルは、同じ大きさの２つの球体，あるいは大きさの異なる２つの球体に適用することができる。

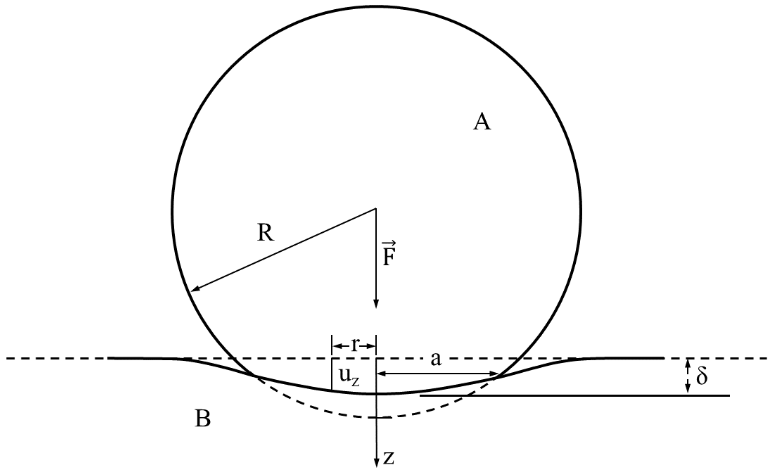


図 1 (A - 球体，B - 無限に広がる半空間)

表面に垂直方向の力しか作用しない場合、圧力がかかったときの表面の弾性的なたわみ（へこみ）は、次の関係で与えられる。：

$$u_z(x,y) = \frac{2\pi}{E'} \iint \frac{p(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx'dy' \tag{1}$$

ここで $u_z$ は表面の弾性的なたわみを、$\frac{1}{E'} = \frac{(1-v_1^2)}{E_1} + \frac{(1-v_2^2)}{E_2}$ は換算弾性率を、$v_1, E_1, v_2, E_2$ はそれぞれ球体のポアソン比とヤング率を表す（これらの値は各球体毎に一定の値を持ち、課題 E.1 の計算で与えられる)。$p(x,y)$ は接触圧である。

圧力分布が任意の値をとるとき、この式から解析解は得られない。しかし、ヘルツ接触理論による解は (2) 式の圧力分布を仮定することで得られ、これは接触している球体、楕円体、円筒体に対して非常に良い近似となる：

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \tag{2}$$

ここで、$r$ は表面上の任意の点までの距離、$a$ はヘルツ接触半径として知られるパラメータである。この圧力の最大値となるパラメータ $p_0$ はヘルツ圧とも呼ばれる。これを式 (1) のたわみの式に代入することで、ヘルツ圧は次の式の中で定義される：

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E'a}(2a^2 - r^2), r \leq a \tag{3}$$

この実験問題は２つのパートから構成される：大振幅振り子、２つのボールの衝突。

**安全に関する注意事項**

1. 電源コードの抜き差しは、必ず機器の電源を切ってから行うこと。破損する恐れがある。
2. 問題の指示がない限り、オシロスコープの設定を変更しないこと。
3. 飲料水を近くの電子機器や電源ソケットにこぼさないように注意せよ。
4. 実験が終了していない限り、最初の実験装置を分解しないこと。分解してしまうと、再び組み立てることができなくなる。

**実験装置**

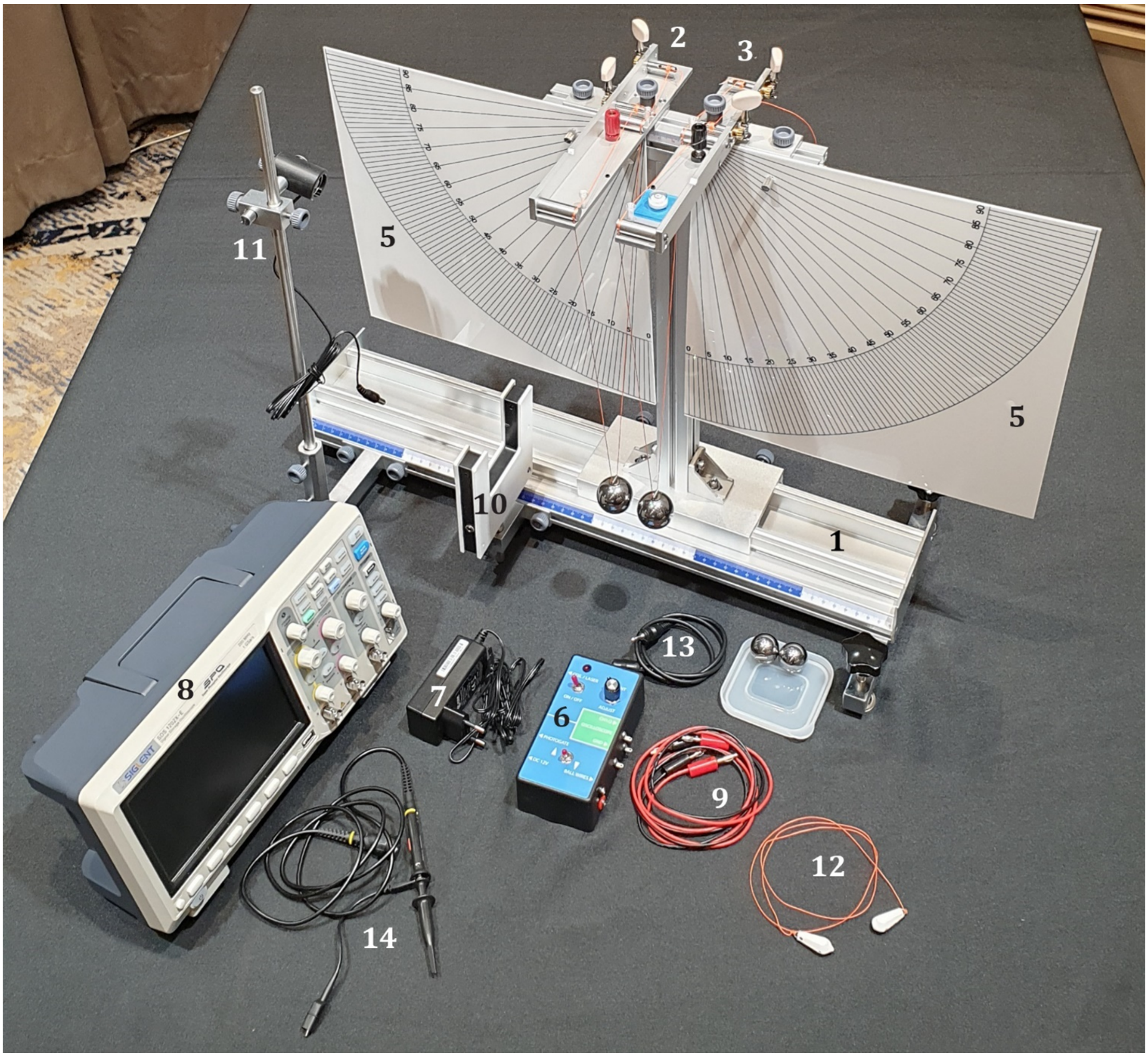


図 2

1. セットアップの土台となる光学レール (土台は両方の実験に使う)
2. 吊り金具付き振り子 1（初めから吊るされている）
3. 吊り金具付き振り子 2（初めから吊るされている）
4. 小球　2 つ
5. 左右の角度測定用スクリーン。
6. コントロールボックス

7. 電源アダプター
8. 測定プローブ (14) 付きオシロスコープ.
9. 球体衝突測定で用いる接続ワイヤー。
10. 接続ケーブル (13) の付いた振り子用フォトゲート
11. 電磁式球体ホルダー（調整スタンド付）
12. 両端に錘が付いたワイヤー

## パート A: 大振幅振り子 [1.4 points]

このパートでは、１つの球体の振り子の最大速度と角度振幅の関係を、振り子をできるだけ大きな振幅から小さな振幅まで振らせて確認しなさい。振り子を使用するには、球体の位置調整テクニックを理解する必要がある。各振り子ハンガーには弦調整ノブが 2 つある。これらは、球体位置の $z$ 方向上下、$y$ 方向前後の調整に用いる。球体位置の $x$ 方向左右の調整は、振り子ハンガーユニットを用いる（図 3）。

この課題では、１つの振り子しか使わないので、すでに取り付けられているもう１つの球体は振り子ハンガーを固定しているボルトの上に退避させること。その際、振り子とのワイヤーが測定対象の振り子の運動の邪魔にならないよう気をつけること。

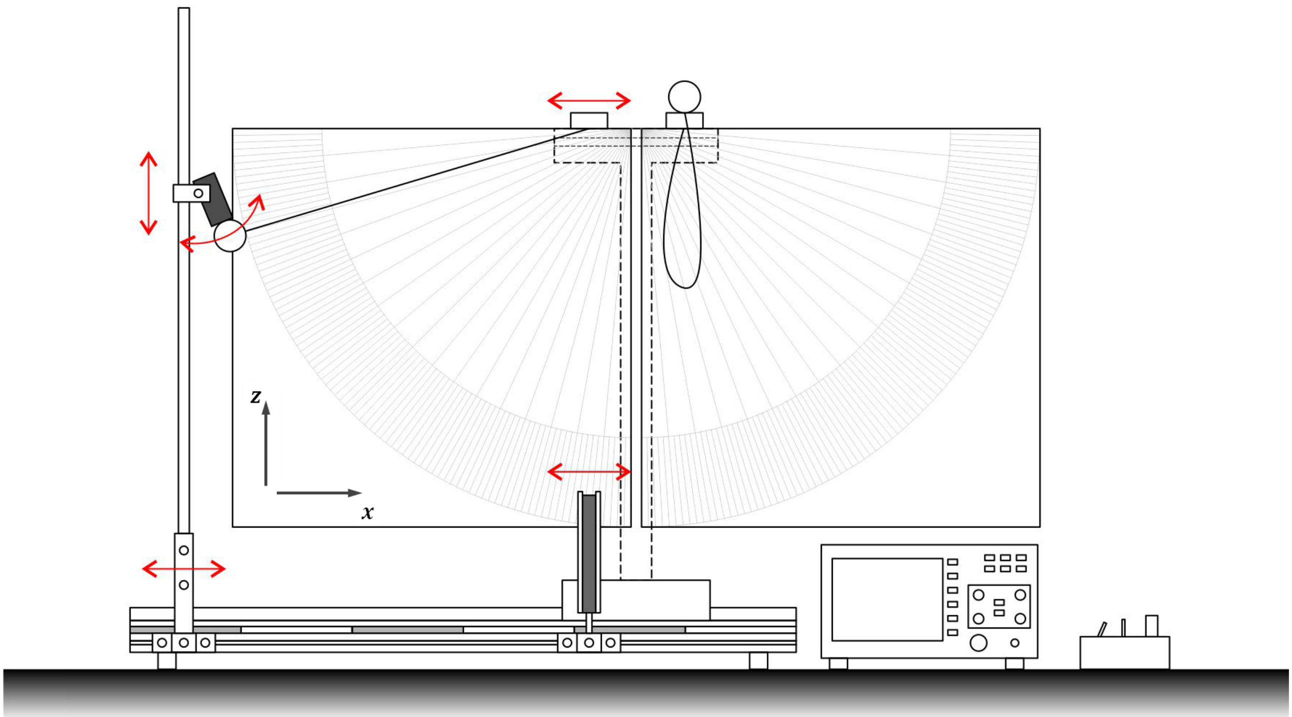


図 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| **A.1** | sin$\frac{\varphi_0}{2}$に対する $\Delta t^{-1}$ の傾斜（傾き）を求めなさい。ここで $\varphi_0$ を振り子の初期振れ角（角度振幅）とし、$\Delta t$ をフォトゲートを通過するのに要する時間とする。<br>注意事項 1. デジタルオシロスコープで時間を正確に測るために、注意事項 (G) にある練習を行うことを勧める。オシロスコープと説明書きの型番に注意すること。時間節約のため課題 B.1 をこの課題と同時に行うとよい。球体が電磁ホルダーから解放される際、ワイヤーの弾性、球体の磁化が球体の初速に影響を与える可能性がある。そのため、フォトゲートからの初回の信号を使用してはならない。 | 1.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | 方程式を導いて、振り子の任意の初期角度に対するボールの最大速度を求めよ。 | 0.2pt |

## パート B: 振動の周期 [1.9 points]

角度振幅に対する振り子の周期は次の級数で与えられる。

$$T = T_0\left(1 + \alpha \cdot \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \beta \cdot \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right) \tag{4}$$

ここで，$T_0$ は振幅が小さいときの振り子の周期、$\alpha$ と $\beta$ は定数係数、$\varphi_0$ は角度振幅である。

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | 振動の周期を計測して、線形のグラフ $T = f(\varphi_0)$ を作成しなさい。適切な領域ごとに異なる線形化が必要になることに注意せよ。グラフから $T_0, \alpha, \beta$ を決定せよ。<br>注意事項 2. デジタルオシロスコープで時間を正確に測るために、注意事項 (G) にある練習を行うことを勧める。オシロスコープと説明書きの型番に注意すること。 | 1.6pt |

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | 課題 A.1 で求めた傾きと課題 B.1 の $T_0$ を用いて、ウランバートルの正確な重力加速度の値を求めなさい。鉄球の直径は $d = 31.75$mm である。 | 0.3pt |

## パート C: 衝突時の挙動 [0.7 points]

2 つの球体の初期位置と状態は、最初の衝突とその後の衝突プロセスに大きく影響する：衝突の位置、接触時間、球体上の接触位置。この課題を実行するには，球体位置の調整に注意を払うこと。

このパートでは、同じサイズの球体の衝突の挙動に及ぼす接触位置の影響を観察する。セクション C.1 ～C.4 (図 4 の説明と対応) で説明されている各シナリオの衝突の動作を観察し、各課題に対してセットアップに対応する位置の時間依存グラフを図 5 から選べ。

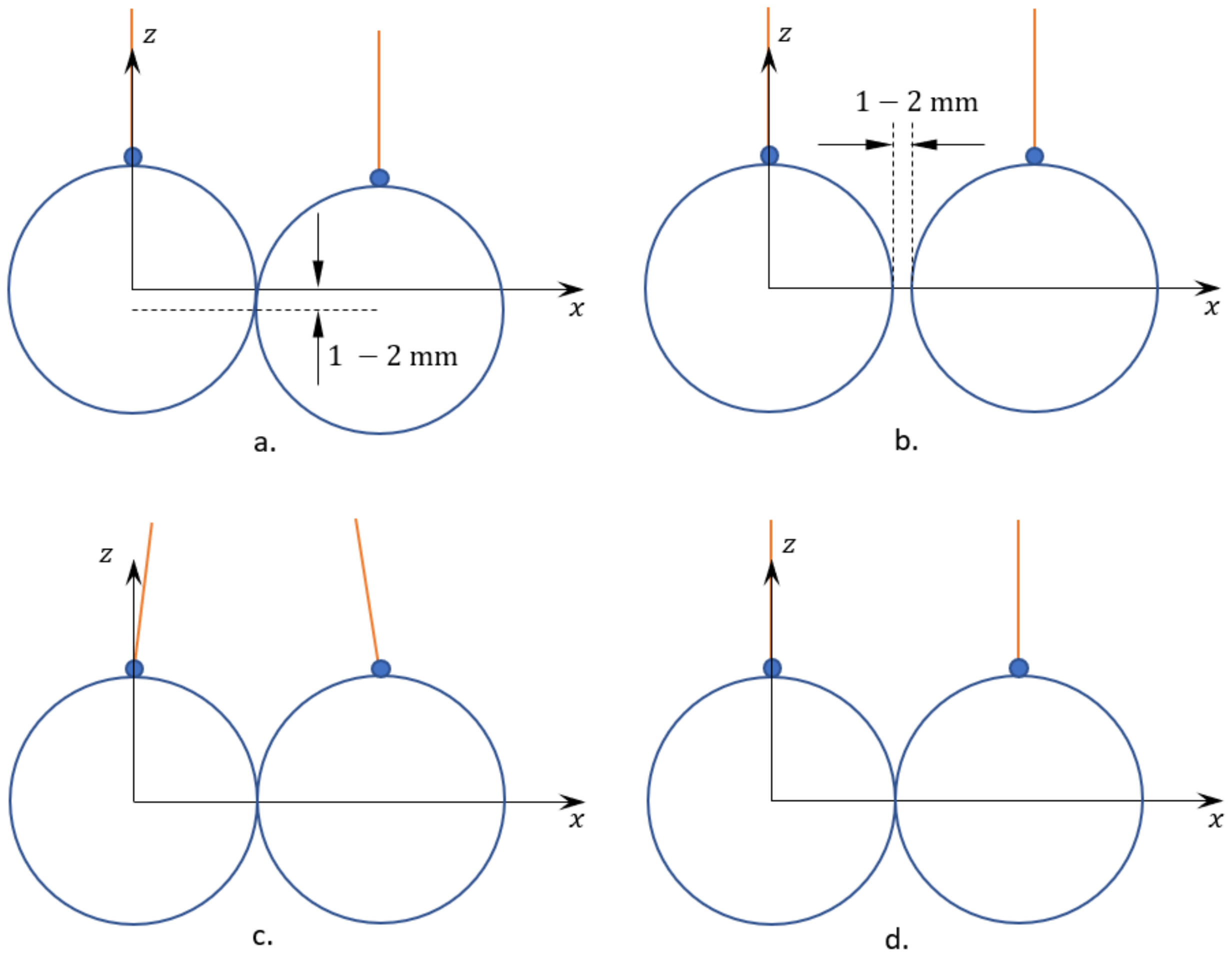


図 4

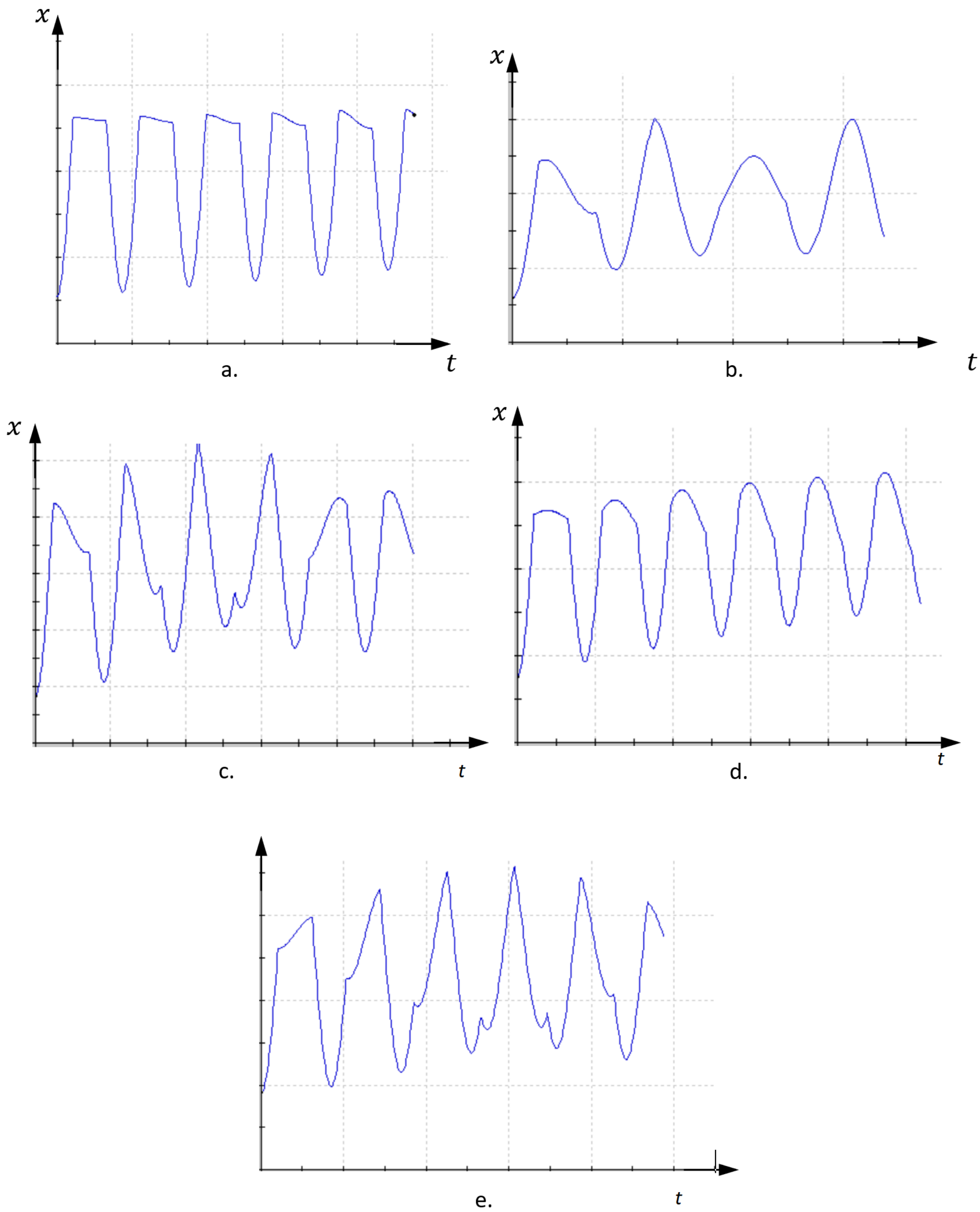


図5

| | | |
|---|---|---|
| **C.1** | 平衡状態において、２つの球が吊るされて静止しているとき、最初に動かす左側の球（球１）の中心を座標系の原点にとる。<br>まず、２つ目の球（球２）の中心の位置を $x$ 方向に $d_x = 2R$ , $y$ 方向に $d_y = 0$, $z$ 方向に $d_z \approx 1$〜$2$ mm とし、球を吊り下げるワイヤがほぼ平行になるように置く（図 4a)。球２を平衡状態の位置に置き、球１の初期角度を $25^\circ$ から $30^\circ$ とし、初速度０で電磁式球体ホルダーから離して、同じ大きさの球の衝突の様子を肉眼で観察し、球１の座標の変化として適切なものを図５の中から選べ。 | 0.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.2** | 平衡状態において、$d_x - 2R \approx 1$ mm, $d_y = 0$, $d_z = 0$ で、球を吊り下げるワイヤがほぼ平行になるように２つの球を置く。つまり、ボールを吊り下げているユニットを球１から離れる方向に $1$ mm だけ動かす（図４b)。球２を平衡状態の位置に置き、球１の初期角度を $25^\circ$ から $30^\circ$ とし、初速度０で電磁式球体ホルダーから離して、同じ大きさの球の衝突の様子を肉眼で観察し、球１の座標の変化として適切なものを図５の中から選べ。 | 0.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.3** | 平衡状態において、$d_x \approx 2R$, $d_y = 0$, $d_z = 0$ で、２つの球および球を吊り下げているユニットの両方が接触するように置く。この場合、ワイヤは平行ではなくなる（図４ c)。球２を平衡状態の位置に置き、球１の初期角度を $25^\circ$ から $30^\circ$ とし、初速度０で電磁式球体ホルダーから離して、同じ大きさの球の衝突の様子を肉眼で観察し、球１の座標の変化として適切なものを図５の中から選べ。 | 0.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.4** | 平衡状態において２つの球を接触するように置き、$d_x \approx 2R$, $d_y = 0$, $d_z = 0$ でボールを吊り下げているユニットを動かして、球を吊り下げるワイヤがほぼ平行になるように置く（図４d)。球２を平衡状態の位置に置き、球１の初期角度を $25^\circ$ から $30^\circ$ とし、初速度０で電磁式球体ホルダーから離して、同じ大きさの球の衝突の様子を肉眼で観察し、球１の座標の変化として適切なものを図５の中から選べ。 | 0.1pt |

## パート D: 衝突時間 [3.0 points]

球が離れるのはヘルツ接触がある程度の時間続いた後である。パート D では、同じ大きさや異なる大きさの球を数回衝突させることによって、球のどのパラメータが衝突時間 ($\tau$) に影響を与えるのかを調べる。

接触時間を調べるために図６に示された電気回路を用いる。ナイロンのワイヤを振り子振動のために用い、加えて細い金属のワイヤも球に接続し回路に用いる。球の交換の際には金属のワイヤが球に接触していることを確認すること。これを正しくおこなうために、木製のつまようじを用いて、金属のワイヤとナイロンのワイヤを、球を吊り下げるための筒に通して動かないように固定すること。ただし、筒の両側を塞がないこと。球を交換する際、固定しているつまようじを取り除く必要がある。このためにゼムクリップが用意されている（図７)。

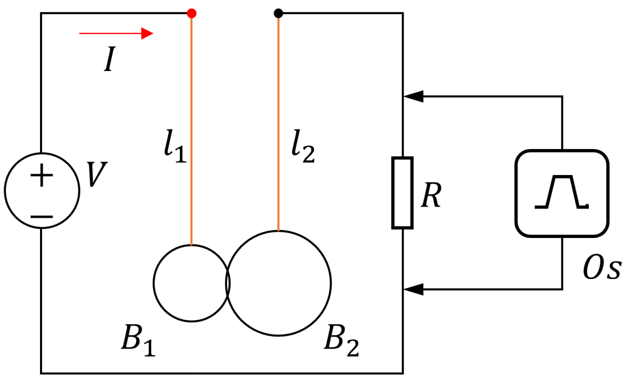


図 6 ($B_1$ - 球 1 , $B_2$ - 球 2 , $Os$ - オシロスコープ)

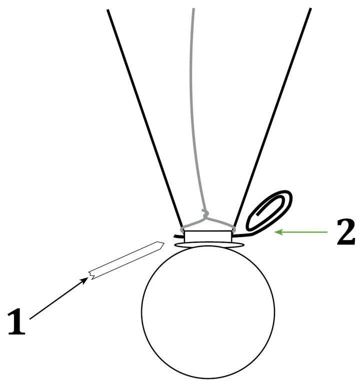


図 7 (1 - つまようじ, 2 - ゼムクリップ)

| | | |
|---|---|---|
| **D.1** | ２つの球の衝突時間 $\tau$ は次式で与えられる。$\tau = A \cdot x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \ldots \cdot x_n^{e_n}$ ここで、$A$ は定数、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ( $n$ は整数) は衝突に関係する物理的なパラメータである。これらの物理的なパラメータを全て決定せよ。指数 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ の値はパート D.2 と D.3 で決定する。 | 0.4pt |
| **D.2** | 実験により、D.1 の $\tau$ の式における指数の値を決めるのに適切な直線のグラフを描け。 | 1.2pt |
| **D.3** | 次元解析を用いて D.2 のグラフから得られた指数の値を用いて、残りの指数の値を求めよ。 | 0.4pt |
| **D.4** | $A$ の値を高精度（少なくとも有効桁数４桁）で求めよ。 | 1.0pt |

## パート E: ヘルツ変形のパラメータ [3.0 points]

A.2 で書いた最大の速さの式と、D.2 で求めた実験結果を用いて、ある程度の初期角度の範囲で以下のパラメータ（図１参照）を求めよ。

($\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E = E_1 = E_2 = 200$ GPa, $m_1 = 131.48$ g, $m_2 = 67.55$ g, $d_1 = 31.74$ mm, $d_2 = 25.42$ mm):

| | | |
|---|---|---|
| **E.1** | 平均的な力 $F_{av}$ に対する数式を求め、数値を計算せよ。 | 0.6pt |
| **E.2** | ヘルツたわみ $\delta$ に対する数式を求め、数値を計算せよ。 | 0.6pt |
| **E.3** | ヘルツ接触半径 $a$ に対する数式を求め、値を計算せよ。 | 0.6pt |
| **E.4** | ヘルツ圧 $P_0$ に対する数式を求め、値を計算せよ。 | 0.6pt |
| **E.5** | 平均圧力 $P_{av}$ に対する数式を求め、値を計算せよ。 | 0.6pt |